

Halil Sykja

(Plotësim i bërë në librin “Bazat e Teorisë së Relativitetit, kapitulli III, botim i vitit 2015-Tiranë)

Teorema e Nöter-it (Noether)¹

(Shenim i autorit. Është fakt i çuditshëm që në traktatin e famshëm shumëvëllimësh të fizikës teorike të autorëve Landau-Lifshic nuk përmendet asnjëherë teorema e Nöter-it, megjithëse trajtohen simetritë e Lagranzhianit në hapësirë-kohë, sidomos në vëllimin I e II. Në përputhje me traditën anglosaksone në këtë ribotim të librit “Bazat e Teorisë së Relativitetit po e trajtojmë këtë teoremë të rëndësishme në kapitullin III të librit të përpunuar, të cilit i janë bërë edhe përmirësime e plotësime të tjera të rëndësishme).

Në këtë aneks po shqyrtojmë hallkat themelore të teoremës së Nöter-it, si një mjet i fuqishëm i studimit të simetrive dhe madhësive konservative në dinamikën e sistemeve fizike-si ato diskrete, ashtu dhe ato të vazhduara.

Fillimisht shohim një sistem diskret grimcash lëndore të karakterizuar nga N gradë lirie ($i=1,2,\dots,N$) të cilit i atribuojmë një funksion veprimi, ose thjesht *veprim* -integralin

$$I(q_i) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt,$$

ku $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ është *Lagranzhiani* i sistemit; $q_1, q_2, \dots, q_N$ janë koordinatat e përgjithësuara të

sistemit dhe $\dot{q}_i(t) \equiv dq_i/dt$ janë *shpejtësitë* e përgjithësuara të tij.

(Shenim:Lexuesi të dallojë në të gjitha formulat që vijojnë pikën mbi simbolet që derivohen në lidhje me kohën, në ndryshim nga çfarë kemi bërë më parë ku pika me të njejtin funksion veprues mbi funksionin ishte më e dalluar!).

Në se marrim parasysh variacionet shumë të vogla të koordinatave, duke i marrë këto variacione zero në dy çaste kufi t_1, t_2 , pra duke variuar trajektoren e sistemit në mënyrë të tillë që të mbahen fikse kufijtë, në mënyrë që të kemi shndërrimin $q_i \rightarrow q'_i = q_i + \delta q_i$; $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, zberthimi në seri të Teilorit për Lagranzhianin na jep shndërrimin e Lagranzhianit të sistemit:

$$L \rightarrow L' = L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

Këtu më lart kuptohet **shuma sipas indeksit latin të përsëritur** nga 1 në N në shprehjet përkatëse dhe këtë do ta kemi parasysh gjithmonë.

Vini re më lart ndërrimin e operacionit delta (variacion) me derivatin në lidhje me kohën. (Lexuesi e vërteton thjeshtë këtë gjë). Që këtëj, pa vështirësi marrim variacionin e Lagranzhianit të dhënë me formulën:

$$\begin{aligned} \delta L = L' - L &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \delta q_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \\ &\delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] \end{aligned}$$

¹ Një paraqitje të shkurtër të teoremës mund ta gjeni edhe në V.Illisie: Concepts in Quantum Field Theory, A Practitioner's Toolkit, Springer 2016. Në këtë shtojcë do të përdorim një numërim të formulave specifik vetëm për shtojcën.

Për të marrë ekuacionet e lëvizjes bazuar mbi parimin e Hamiltonit, sipas të cilit variacioni i veprimit është zero kur sistemi kënaq ekuacionet e lëvizjes reale të sistemit, duhet të plotësohet kushti i ekstremumit:

$$\delta I(q_i) \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = 0$$

Nga më sipër gjejmë

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] dt$$

Mirëpo, meqenëse kemi $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, rrjedh se integrali i dytë këtu më lart anulohet dhe pra do gjejmë, se duhet të rezultojë

$$\delta I = 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]$$

për një variacion arbitrar të vogël $\delta q_i(t)$ për çaste të ndërmjetme ndërmjet dy kufijvë të kohës. Që kjo të dalë kështu sido që tëjetë marrë madhësia $\delta q_i(t)$ për kohët e ndërmjetme, shprehja nën integralin e mësipërm është zero dhe marrim ekuacionin e lëvizjes së sistemit, ose *ekuacionet Ojler-Lagranzh*:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

Tani, siç është e njohur nga mekanika, veprimi i sistemit **nuk përcaktohet në mënyrë të vetme**, që do të thotë se nëse ndërrojmë Lagranzhianin e sistemit nga një origjinal- L në një të ri L^* , i cili të ndryshojë nga i pari nga derivati i plotë me kohën i një funksioni të koordinatave dhe kohës- $f(q_i, t)$, veprimi mbetet i pandryshuar. Vërtetë, le të marrim Lagranzhianin e ri $L^* = L - df(q_i, t)/dt$ dhe llogaritim e veprimin e ri do të gjejmë:

$$I^* = \int_{t_1}^{t_2} L^* dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L - \frac{df}{dt} \right] dt$$

Variacioni i këtij veprimi të ri do të jetë

$$\delta I^* = \int_{t_1}^{t_2} \delta L^* dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L - \frac{d(\delta f)}{dt} \right] dt$$

Por, nga ana tjetër kemi $\delta f(q, t) = \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i$ dhe kështu marri $\delta I^* = \delta I - \frac{\partial f}{\partial q_i} (\delta q_i(t_2) - \delta q_i(t_1)) = \delta I$. Pra,

veprimi mbetet invariant ndaj këtij shndërrimi të Lagranzhianit, prandaj edhe ekuacionet e lëvizjes mbeten të njëjta. Nga më sipër, ne arrijmë në përfundimin që nëse një shndërrim infinitezimal i koordinatave $q \rightarrow q + \delta q$ është i tillë që Lagranzhiani i ri është i tillë që variacioni i vet të merret në trajtën

$\delta L = \frac{d(\delta f)}{dt} = \frac{dF}{dt}$, atëherë veprimi mbetet po ai dhe kështu δq është **simetri e sistemit mekanik**.

Pra, çdo shndërrim koordinativ që ka efekt të vetëm atë të shndërrimit të Lagranzhianit të një sistemi vetëm me afërsinë e një termi që është derivat i plotë i një funksioni të koordinatave dhe kohës do të lejë ekuacionet e lëvizjes së pandryshuara dhe kështu ai shndërrim është një simetri.

Teorema e Nëterit konsiston në këtë pohim:

Në se veprimi i një sistemi **është invariant** ndaj një shndërrimi infinitezimal të tillë që koordinatat e përgjithsuara kalojnë nga $q \rightarrow q + \delta q$, atëherë-gjegjësisht- ndaj këtij shndërrimi **ekziston një ligj ruajtjeje** dhe madhësia që ruhet- madhësia që po e shenojmë J- mund të merret si funksion i Lagranzhianit dhe madhësisë së shndërrimit infinitezimal.

Vërtetim:

Supozojmë se shndërrimi i koordinatave $q_i \rightarrow q_i' = q_i + \delta q_i$ është një simetri e sistemit. Atëherë do kemi këtë variacion të Lagranzhianit:

$$\delta L = 0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{dF}{dt}$$

Duke përdorur ekuacionet e lëvizjes O-L për ekuacionin e marrë mund të shkruajmë:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{dF}{dt} = 0,$$

dhe marrim këtë ekuacion:

$$J \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - F \right) = 0$$

Këtu veçuam qartë madhësinë që ruhet me kalimin e kohës dhe pikërisht madhësinë:

$$Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - F = \text{const.}$$

Është bërë zakon që madhësia që ruhet të quhet *ngarkesa e Nëterit* dhe derivati i saj në lidhje me kohën quhet *rryma e Nëterit*.

Në mekanikën Lagranzhiane teorema e Nëterit funksionon sipas këtij rendi:

1. Bëjmë një shndërrim koordinatash me madhësitë δq_i
2. Vlerësojmë variacionin e Lagranzhianit si rezultat i këtij shndërrimi
3. Në se Lagranzhiani varion sipas lidhjes $\delta L = dF/dt$, atëherë shndërrimi në fjalë i koordinatave është një simetri e sistemit
4. Si rezultat kemi një madhësi që ruhet gjatë kohës, që është ngarkesa e Nëterit, pra rryma është zero kur ka simetri.

Për ilustrim po trajtojmë ruajtjen e impulsit dhe momentit të impulsit (momentit linear) të sistemit mekanik, si rrjedhoja të simetrisë së Lagranzhianit ndaj një shndërrimi të dhënë koordinativ.

• Zbatime të teoremës

a. Translacioni në hapësirë dhe ruajtja e impulsit (momentit linear)

Ky ligj ruajtjeje vjen si rezultat i lirisë së zgjedhjes së origjinës së koordinatave. Për thjeshtësi, shqyrtojmë lëvizjen me një përmasë të një grimce me masë m , sipas boshtit x dhe siç dihet Lagranzhiani e kemi të trajtës

$$L = m \dot{x}_i \dot{x}_i / 2; \dot{x}_i \equiv dx/dt; i = 1, 2, 3$$

Atëherë, bëjmë një shndërrim të koordinatave x me anë të translacionit me një madhësi konstante, sipas skemës: $x_i \rightarrow x'_i = x_i + a_i; a_i = \delta x_i; \dot{x}'_i = \dot{x}_i; \delta \dot{x}_i = 0$. Lagranzhiani pëson një variacion si më poshtë:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0,$$

sepse Lagranzhiani nuk varet në mënyrë eksplicite nga koordinatat Karteziane dhe se variacioni i shpejtësive është zero. Meqenëse nuk kemi variacion të Lagranzhianit, nga formula $\delta L = \frac{dF}{dt}$ mund të marrim funksioni F të trajtës $F=C$ (konstante). Për rrjedhojë rryma e Nëterit në këtë rast-një madhësi që ruhet në kohë- është madhësia:

$$J \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - F = m \dot{x}_i a_i - C = \text{const.}$$

Dalohet menjëherë madhësia fizike që ruhet-momenti linear, ose impulsi i sistemit

$$p_i = \text{const.}$$

(C dhe a_i janë konstante)

b. Rrotullimi në hapësirë dhe ruajtja e momentit këndor (momentit të impulsit)

E zemë-për thjeshtësi, se kemi lëvizjen e një grimce masive me një shpejtësi të dhënë në një rrafsh. Duke marrë koordinatat Karteziane në rrafsh- x, y , kemi këtë Lagranzhian:

$$L = m \dot{x}^2 / 2 + m \dot{y}^2 / 2$$

Duke marrë një rrotullim në rrafshin x, y me një kënd të dhënë dhe ruajtur origjinën e koordinatave kemi fillimisht këtë shndërrim koordinativ:

$$\begin{cases} x' = (\cos \theta)x + (\sin \theta)y \\ y' = -(\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{cases}$$

ku është në dukje **këndi i fundëm** i rrotullimit të boshteve. Në se marrim një rrotullim *infinitesimal*, të tillë që $\theta \ll 1$, atëherë me përafërsi shkruajmë këtë shndërrim infinitesimal:

$$\begin{cases} x' = x + \theta y \\ y' = -\theta x + y \end{cases}, \text{ sepse } \delta x = \theta y; \delta y = -\theta x$$

Nga më lart me derivim në kohë kemi

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} + \theta \dot{y} \\ \dot{y}' = -\theta \dot{x} + \dot{y} \end{cases}, \text{ pra kemi } \delta \dot{x}' = \theta \dot{y}; \delta \dot{y}' = -\theta \dot{x}$$

Që këtej, variacioni i Lagranzhianit del qartas i dhënë me formulën:

$$\delta L = m \dot{x} \dot{y} \theta + m \dot{y} \left(-\dot{x} \theta \right) = 0$$

Për këtë arsye rryma e Nëterit do dalë $J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta y - F = (x p_y - y p_x) \theta - C = \text{const}$ dhe meqenëse këndi infinitezimal i rrotullimit është çfarëdo kemi këtë madhësi që ruhet në kohë:

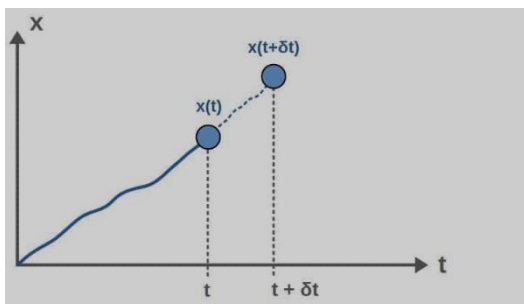
$$L_z = (x p_y - y p_x) = \text{const.},$$

ku z është boshti sipas të cilit bëhet rrotullimi (pingul merrafshin x, y). Ky është momenti këndor sipas oz .

c. Translacioni në kohë dhe ruajtja e energjisë

Deri tani pamë simetrinë lidhur me translacionin e sistemit koordinativ në hapësirë, që çoi në ruajtjen e momentit linear të sistemit mekanik (impulsin). Tani shohim çfarë sjell translacioni kohor. Kur bëhet translacion i kohës një grimcë lëndore në lëvizje pritët të ndryshojnë koordinatat e saj, meqenëse janë funksione të kohës (fig.)

Ne mund ta karakterizojmë një translacion kohor matematikisht duke kaluar nga variabli t në $t + \delta t$. Kështu kemi ndërrimet



$$q_i(t) \rightarrow q_i(t + \delta t); \dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t + \delta t)$$

Nga ana tjetër, duke qenë se δt është madhësi infinitezimale, mund të zbërthejmë në seri të Teilorit funksionet përkatëse:

$$q_i(t + \delta t) \approx q_i(t) + \dot{q}_i(t) \delta t;$$

$$\dot{q}_i(t + \delta t) \approx \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) \delta t$$

Për rrjedhojë kemi këtë variacion të Lagranzhianit të sistemit mekanik :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \delta t$$

Ndërkaq, derivati i plotë i Lagranzhianit në lidhje me kohën do të ishte si vijon:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mbi bazën e këtij ekuacioni të fundit mund të shkruajmë variacionin e Lagranzhianit edhe në trajtën

$$\delta L = \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \right) \delta t$$

Shihet qartë se kur Lagranzhiani nuk është i varur në mënyrë eksplicite nga koha, pra kur ai ka trajtën $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, variacioni i tij si rezultat i translacionit në kohë do të kishte trajtën e duhur për të pasur një madhësi që ruhet, pra do të kishte trajtën

$$\delta L = \frac{dL}{dt} \delta t = \frac{d(L\delta t)}{dt} \equiv \frac{dF}{dt},$$

Ku tani kuptohet se funksioni F është funksion **vetëm i koordinatave dhe i kohës**. Madhësia që ruhet (ngarkesa e Nëterit) në këtë rast është :

$$Q = p_i \delta q_i - F = p_i \dot{q}_i \delta t - L \delta t = \left(p_i \dot{q}_i - L \right) \delta t = \text{const.}$$

Meqenëse variacioni δt është fiks për të gjitha grimcat del që madhësia që ruhet është

$$Q = \left(p_i \dot{q}_i - L \right) = \text{const.} ; \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Sikur të kishim një grimca të vetme me masë m në lëvizje me shpejtësi konstante sipas boshtit x do të kishim :

$$Q = \left(p \dot{q}_i - L \right) = m \dot{x} \dot{x} - m \dot{x}^2 / 2 = m \dot{x}^2 / 2$$

Madhësia që ruhet është energjia mekanike, ose ndryshe *Hamiltoniani* i sistemit në një paraqitje tjetër (Hamiltoniane) të mekanikës në vend të asaj Lagranzhiane.

d. Teorema e Nëter-it në teorinë e fushës klasike

Në fakt teorema Nëter ka rëndësinë më të veçantë kur zbatohet në teorinë e fushës klasike, që është baza e teorive moderne të fizikës. Në teorinë e fushës përdoret si më e përshtatëshme trajta Lagranzhiane, për arsye të faktit që fushat e vazhduara të teorive bashkëkohore janë relativiste (Teoria Speciale e Relativitetit).

Kemi thënë se koordinatat diskrete dhe derivati i tyre me kohën, që kemi në mekanikën diskrete të grimcave, do të zëvendësohen me funksionet e vazhduara- ϕ_a , $a=1,2,\dots,n$ - sa numri i funksioneve, si vijon:

$$q_i(t) \Rightarrow \phi_a(\bar{x}, t) \equiv \phi_a(x^\mu) \equiv \phi_a(x); \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \text{dhe} \quad \dot{q}_i(t) \Rightarrow \partial \phi_a / \partial x^\mu \equiv \phi_{a,\mu} \equiv \partial_\mu \phi_a(x)$$

Kemi edhe operatorin kontragradiënt $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$.

Supozojmë se kemi fushë të vazhduar klasike, Lagranzhiani i të cilave është invariant edhe ndaj **translacioneve në hapësirë-kohë**, përveç invariancës ndaj shndërrimit të Lorencit (rrrotullimeve në hapësirë-kohë), kështu që për rrjedhojë **nuk kemi vartësi eksplicite nga koordinatat hapësinore-kohore** x^μ . Në këto rethana Lagranzhiani i fushës klasike do të shkruhej

$$L = \int_{\infty} (\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) dV,$$

ku $\mathcal{L}$ është dendësia e Lagranzhianit. Me indeks a tani janë shënuar fushat që hyjnë në Lagranzhian- fusha që

janë në një numër të fundëm, në vartësi të rastit konkret. Atëherë, veprimi i fushës do të jetë i dhënë me formulën:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_{\mu} \phi_a(x)) dV = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_{\mu} \phi_a(x)) d\Omega; c = 1,$$

ku Ω është një vëllim katërpërmasor që “përfshin” tri-hapësirën e pafundme dhe intervalin kohor nga një çast t_1 në një tjetër $t_2 > t_1$. Tërheqim vëmendjen e lexuesit se duhet të kemi parasysh shumim sipas indeksit latin a , kur kemi të bëjmë me fushë me shumë përbërëse, por ne nuk po e shenojmë për të mos rënduar shkrimin. Në rastin e fushës me një përbërëse (fushës skalare) indeksi nuk figuron. Kështu, në rastin e teorisë relativiste të fushës, më shpesh do të përdorim rastin më të thjeshtë të fushës skalare $\psi(x^{\mu}) \equiv \psi(x)$, për të cilin, kur bëhet një shndërrim Lorenci, kemi $\psi'(x') \equiv \psi(x)$.

Që tani mund të anticipojmë me këto pohime, të cilat do t'i demonstrojmë sëshpejti, pohime që janë:

1. Në se Lagranzhiani i një sistemi të vazhduar është invariant ndaj shndërrimit të Lorencit (ose grupit të Puenkare'-së), atëherë edhe veprimi është po ashtu invariant, përderisa elementi vëllimor katërpërmasor është Lorenc-invariant.
2. Lagranzhiani i sistemit të vazhduar nuk është i përcaktuar në mënyrë të vetme, në kuptimin që dy Lagranzhiane $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{L}'$, që ndryshojnë nga njeri-tjetri vetëm nga një katërdivergjencë e një fushe vektoriale e tipit $\partial_{\mu} F^{\mu}(x)$, janë të njëvlershëm, pra veprimet e tyre gjegjëse- I, I' japin të njejtat ekuacione “të lëvizjes” së fushës mbi bazën e parimit të veprimit minimal.

Si përsëritje të asaj që kemi thënë më parë, bëjmë variacionin e veprimit të fushës nepërmjet variacionit të funksioneve të fushës dhe marrim këtë variacion:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \delta (\partial_{\mu} \phi_a) \right] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a d\Omega + \int_{\Omega} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \delta \phi_a \right) d\Omega \end{aligned}$$

(Me që përsëritet indeksi a nënkuptohet shumë sipas tij për $a=1,2,\dots,n$, duke mos e shënuar shenjën e shumës, por duke e nënkuptuar).

Integrali i fundit është integral në një katërvëllim të një katërdivergjence të një katërvektori. Siç dihet, ai kthehet në fluks (teorema e Gausit) në një hipersipërfaqe rrethuese të katërvëllimit tonë Ω . Ai fluks bëhet zero sepse supozohet se fusha është zero në infinit të hapësirë tripërmasore (në raport me origjinën e zgjedhur të koordinatave hapësinore) dhe kemi $\delta \phi_a(x_1) \equiv \delta \phi_a(\vec{r}_{\infty}, t_1) = \delta \phi_a(x_2) \equiv \delta \phi_a(\vec{r}_{\infty}, t_2) = 0$. Atëherë, duke kërkuar që të plotësohet parimi i Hamiltonit i veprimit ekstremal, pra duke kërkuar që $\delta I = 0$ për çdo variacion të fushës që plotëson kushtet në kufi, marrim ekuacionet “e lëvizjes” së fushës, ose ekuacionet Ojler-Lagranzh, të trajtës:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \right)} \quad (a)$$

Në se do kërkonim variacionin e dendësisë së Lagranzhianit - $\mathcal{L}$, do të merrnim formulën

$$\delta \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a) \right] = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) \quad (b)$$

Në këtë formulë kuptohet shuma sipas indeksit grek nga zero deri në tre dhe shuma sipas indeksit latin a nga 1 deri në N, aq sa është numri i funksioneve të fushës. Nga më lart shihet se Lagranzhiani i sistemit (në fakt

dendësia e tij) **nuk përcaktohet në mënyrë të vetme**, pra dy Lagranzhiane- $\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ dhe $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) + \partial_\mu F^\mu(\phi_a)$ prodhojnë të njëjtat ekuacione të fushës, krejt në ngjashmëri me mekanikën diskrete të grimcave, për të cilën Lagranzhiani përcaktohet me afërsinë e një termi shtesë, që është derivat i plotë i një funksioni çfarëdo i koordinatave dhe kohës në lidhje me kohën, pra të një termi të trajtës $dF(q_i, t)/dt$. Termi shtesë i Lagranzhianit, që nuk ndikon në ekuacionet e lëvizjes është

$$F^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right)$$

Shndërrimi i funksioneve të fushës që kalon $\phi_a \rightarrow \phi_a + \delta \phi_a$ me $\delta \phi_a \equiv X_a(\phi)$ përfaqëson një simetri në se variacioni gjegjësi i Lagranzhianit është i formës:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu,$$

ku $F^\mu(\phi)$ është një bashkësi funksionesh të funksioneve të fushës-përbërëse të një fushe vektoriale katërpërmasore. (Vëreni analogjinë me variacionin e Lagranzhianit me afërsinë e një derivati të plotë të një funksioni çfarëdo të koordinatave dhe kohës).

Kalojmë tani në teoremën e Nëterit në fushat klasike të vazhduara.

Formulimi i teoremës është ky: Çdo simetri e vazhduar e Lagranzhianit të fushës shpie në ekzistencën e një “rryme” konservative-rryma e Nëterit- j^μ ; $\mu = 0, 1, 2, 3$, të tillë që të plotësohet ekuacioni diferencial

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

apo

$$\partial_0 j^0 + \nabla \cdot \vec{j} = 0,$$

gjë që nënkupton një ngarkesë që ruhet-ngarkesën e Nëterit Q, e cila përkufizohet me formulën

$$Q = \int_{V_\infty} j^0 dV,$$

Kjo gjë verifikohet lehtë po të marrim derivatin kohor të saj

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V_\infty} \frac{\partial j^0}{\partial t} dV = - \int_{V_\infty} \nabla \cdot \vec{j} dV = \oint_{S_\infty} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0,$$

sepse rryma shkon aq sa duhet shpejt në zero kur jemi pambarimisht larg origjinës së koordinatave hapësinore. “Ngarkesa” e Nëterit **mbetet konstante në kohë**.

Në se duam ngarkesën në një vëllim të fundëm V të hapësirës tripërmasore, atëherë do të kemi

$Q_v = \int_V j^0 dV$ ngarkesën e përfshirë në vëllimin e fundëm V dhe derivatin kohor të saj të dhënë me:

$$\frac{dQ_v}{dt} = \int_v \frac{\partial \vec{j}^0}{\partial t} dV = - \int_v \nabla \cdot \vec{j} dV = - \oint_{S_v} \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

ku S_v është sipërfaqja rrethuese e vëllimit të fundëm. Ky është **ligji lokal** i ruajtjes së “ngarkesës” së Nëterit, në analogji me rusjtjen e ngarkesës elektrike në lëvizjen e ngarkesave elektrike të shpërndara në mënyrë të vazhduar në hapësirë.

Atëherë, fillimisht bëjmë një shndërrim arbitrar të funksioneve të fushës $\phi_a \rightarrow \phi_a + \delta\phi_a$ me $\delta\phi_a \equiv X_a(\phi)$, për të marrë variacionin e Lagranzhianit me formulën (b). Meqenëse po kërkojmë të plotësohen ekuacionet e fushës, merret variacioni i Lagranzhianit i dhënë me formulën

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} X_a \right)$$

Nga ana tjetër, nëse $\delta\phi_a \equiv X_a(\phi)$ është simetri e fushës, duhet të kemi edhe $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$. Duke krahasuar

gjejmë këtë rezultat evident: $\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} X_a \right) - \partial_\mu F^\mu = 0$, ose

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (c),$$

ku

$$J^\mu \equiv \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} X_a \right) - F^\mu \quad (d)$$

është madhësia që ruhet-rryma e Nëterit. Ky përfundim përbën demonstrimin e teoremës.

d₁ .Translacionet në hapësirë-kohë dhe tenzori i energji-impulsit i fushës klasike

Në mekanikën diskrete pamë që invarianca ndaj translacioneve në hapësirë shpinte në ruajtjen e impulsit, ndërsa invarianca ndaj translacionit në kohë shpinte në ruajtjen e energjisë. Tani do të shohim që diçka e ngjashme ekziston në teorinë e fushës. Kështu le të marrim një translacion infinitezimal të trajtës

$$x^\nu \rightarrow x^{\nu'} = x^\nu - \xi^\nu; \quad x^{\nu'} = x^\nu + \xi^\nu \quad \xi^\nu \ll 1$$

që sjell shndërrimin e funksioneve të fushës sipas formulës

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x) + \xi^\nu \partial_\nu \phi_a(x) \quad (e),$$

Këtu më lart të vërehet shenja që shfaqet plus sepse po marrim parasysh një **shndërrim aktiv** dhe jo **pasiv**.

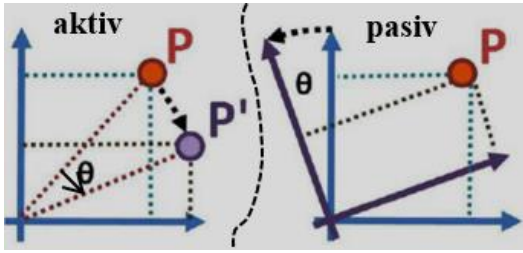
[Vërejtje: Cili është ndryshimi ndërmjet shndërrimit aktiv me atë pasiv? E sqarojmë këtë gjë me një shembull konkret mjaft të qartë e lehtësisht të përfytyrueshëm.

E zemë se duam ta zhvendosim fushën e temperaturave në dhomë në të djathtë. Pra, kjo është temperatura që fqinji i juaj në të majtë po ndjen tani dhe ju të ndjeni pas zhvendosjes.

Ka dy mënyra të arrihet kjo gjë: sëpari, mund të lëvizim molekulat e ajrit në të djathtë dhe efektivisht kemi zhvendosur temperaturën në të djathtë; sëdyti, mund ta lemë ajrin të palëvizur dhe ne mund të lëvizim në të majtë, pra të ndjejmë atë temperaturë që fqinji i majtë i yni ndjeu para veprimit. Pyetja është se cili është ndryshimi i veprimeve në fjalë? Për veprimin e parë themi se është bërë një shndërrim aktiv, ndërsa për të dytin themi se është bërë një shndërrim pasiv.

Që ta shprehim matematikisht këtë gjë, themi se shndërrimi aktiv është një shndërrim që vetë gjëja (në rastin tonë fusha e temperaturës) lëviz, në një kohë kur shndërrimi pasiv është ai kur lëvizim sistemin e referimit të koordinatave (në rastin tonë lëvizim ne vetë).

Është plotësisht e qartë që shndërrimi aktiv, pa marrë parasysh një sistem koordinativ referimi është më me kuptim të drejtpërdrejtë fizik. Thënë me fjalë të tjera, në rastin e shembullit që po shqyrtojmë, shndërrimi pasiv ka kuptim në se **ne jemi në dhomë** dhe lëvizim për të ndjerë ndryshimin, ndërsa shndërrimi aktiv ka kuptim fare të rregullt, **pa qenë nevoja të jemi ne në dhomë për të vënë re ndryshimin**.



Në figurën këtu kemi një ilustrim të mirë për të treguar ndryshimin e shndërrimit aktiv me atë pasiv. Shihet se jemi në rrafshin x, y (rrafshi i figurës) ku marrim në shqyrtim një pikë P të tij. Shndërrojmë koordinatat e pikës P duke ruajtur të palëvizshëm sistemin Kartezian të koordinatave por duke rrotulluar rreze-vektorin e pikës me një kënd θ

në sensin orar (fig.majtas). Pika P ka shkuar në P' . Mirëpo ne mund të marrim të njejtin rezultat të shndërrimit të koordinatave të pikës P që mbetet në vend, KUR rrotullohet sistemi koordinativ në sensin kundër-orar me këndin $-\theta$. Ky është shndërrim pasiv, në ndryshim nga ai aktiv i bërë më parë. Shihet qartë se kemi të njejtin shndërrim- rezultat të dy veprimeve.

Për këtë arsye, në teorinë e fushës, si klasike ashtu dhe kuantike, merren në shqyrtim shndërrimet aktive, pra zhvendosim fushat dhe jo sistemin koordinativ. Kështu, do të marrim parasysh vazhdimisht shndërrimet aktive]

Duke qenë fusha skalare, duhet të kemi $\phi_a(x) = \phi'_a(x') = \phi_a(x' - \xi^\nu)$, nga ku del menjëherë ekuacioni (e) Atëherë, dendësia e Lagranzhianit shndërrohet sipas skemës:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x) \quad (e'),$$

duke imituar shndërrimin e skalarit $\phi(x)$. Kjo gjë është e saktë duke pasur parasysh se Lagranzhiani nuk varet në mënyrë eksplicite nga koordinatat x , por vetëm nepërmjet funksionit të fushës dhe derivateve të tij. Të gjitha fushat klasike që shqyrtojmë gëzojnë këtë veti të pavarësisë eksplicite të Lagranzhianit nga koordinatat hapësinore-kohore në ngjashmëri me mekanikën e grimcave kur Lagranzhiani nuk varej në mënyrë eksplicite nga koha.

Në këto rethana, meqenëse variacioni i Lagranzhianit është $\delta \mathcal{L}(x) = \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\nu (\xi^\nu \mathcal{L})$ (madhësitë ξ^ν janë konstante!), jemi në kushtet e teoremës së Nëterit, prandaj mund të identifikojmë katër madhësi që ruhen, që i gjegjen katër komponenteve të madhësisë së translacionit $\xi^\nu; \nu = 0, 1, 2, 3$, që janë

$$(J^\mu)_\nu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a \right) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \equiv T^\mu_\nu \quad (f),$$

sepse madhësitë konstante ξ^ν thjeshtohen në procesin e katërdivergjencës së rrymës së Nëterit. Shprehja në kllapa quhet **tenzori dendësi i energji-impulsit** të fushës klasike, që qartas gëzon vetinë fundamentale:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (f')$$

Krahasoni formulën e tenzorit të energji-impulsit këtu me formulën (3.3.2') të fituar më parë.

Madhësitë që ruhen janë energjia e tërë fushës-E dhe impulsi i tërë fushës me komponente hapësinore $P^i; i=1, 2, 3$ të dhëna me shprehjet përkatëse:

$$E = \int_{V_\infty} T^{00} dV; P^i = \int_{V_\infty} T^{0i} dV$$

Shembull: Marrim parasysh një fushë skalare $\phi(\vec{r}, t) \equiv \phi(x)$ me Lagranzhian të dhënë me formulën

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (A)$$

Nga ky Lagranzhian gjejmë madhësitë që ruhen, nepërmjet tenzorit të energji-impulsit (f) kur kemi vetëm një “koordinatë” të fushës $\phi(\vec{r}, t) \equiv \phi(x)$. Do të kemi:

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\dot{\phi}}{c} \right)} \dot{\phi} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Kjo dendësi energjie është shumë e “energjisë kinetike” E dhe “energjisë potenciale” të fushës-V, pra kemi

$$E = T + U ,$$

ku

$$T = \frac{\dot{\phi}^2}{2}; U = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Nxjerrim ekuacionet e fushës duke u nisur nga Lagranzhiani (A), duke nxjerrë më parë madhësitë:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi = (\dot{\phi}, -\nabla \phi)$$

Ekuacioni Ojler-Lagranzh (a) jep këtë ekuacion diferencial:

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 ,$$

që në trajtë katërpërmasore rishkruhet

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (B)$$

Ky është *ekuacioni i Klain-Gordonit* i përmendur edhe më parë nga ne.

Shembull: Lagranzhiani i fushës elektromagnetike në zbrazëti në mungesë të ngarkesave është i dhënë me formulën tashmë të njohur:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Duke ndjekur të njejtën procedurë, provoni që energjia që ruhet është me dendësi

$$T^{00} = w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} ,$$

ku siç dimë kemi këtë lidhje të fushave vektoriale me funksionet potenciale të fushës

$$A^\mu = (A^0, A^{1,2,3}) \equiv (\phi/c, \vec{A}) , \text{ që janë } \vec{E} = -\nabla \phi - \dot{\vec{A}}; \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

d₂ . Shdërrimi i Lorencit lidhur me rrotullimet në hapësirë-kohë dhe ruajtja e momentit këndor të fushës

Në mekanikën klasike diskrete (te grimcave) invarianca ndaj rrotullimeve në hapësirë shpinte ruajtjen e momentit këndor. Tani shtrohet pyetja se cila është analogjia në teorinë e fushës?

Për të parë se cilat madhësi fizike ruhen në rastin e fushës klasike relativiste lidhur me **rrotullimet në hapësirë-kohë**, që i gjejnë shndërrimit homogjen të Lorencit, shqyrtojmë një shndërrim infinitezimal të koordinatave hapësinore-kohore me anë të matricës së shndërrimit në këtë rast- A^μ_ν :

$$x \rightarrow x': x'^{\mu} = A^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu \quad (a),$$

ku kemi parasysh madhësitë infinitezimale $\omega^\mu_\nu \ll 1$. Që shndërrimi (a) të jetë shndërrim Lorenci duhet të lejë intervalin infinitezimal të ngjarjeve invariant, gjë që shpie automatikisht tek kushti:

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \quad (a')$$

Sigurisht, kemi ngritjen e indeksit grek me formulën e njohur $\omega^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \omega_\rho^\nu$.

Detyrë: Provoni antisimetrinë e koeficientëve të shndërrimit infinitezimal më sipër.

Pra, shndërrimi karakterizohet **në rastin më të përgjithshëm** nga tri translacione në hapësirë-kohë dhe tri rrotullime në trihapësirë, pra janë gjithsej 6 parametra që karakterizojnë shndërrimin homogjen të Lorencit. Në se do të paraqitnim në trajtë matricore 4x4 tabela e koeficientëve do të kishte pamjen:

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \omega^{01} & \omega^{02} & \omega^{03} \\ -\omega^{01} & 0 & \omega^{12} & \omega^{13} \\ -\omega^{02} & -\omega^{12} & 0 & \omega^{23} \\ -\omega^{03} & -\omega^{13} & -\omega^{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Koeficientët $\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03}$ i gjejnë lëvizjes relative të sistemeve inerciale sipas boshteve x,y,z përkatësisht me shpejtësi konstante, ndërsa $\omega^{12}, \omega^{13}, \omega^{23}$ i gjejnë këndëve që formojnë me njeri-tjetrin boshtet karteziene të dy sistemeve (për shembull këndet e Ojlerit). Këta janë 6 parametrat që karakterizojnë shndërrimin homogjen të Lorencit.

Kemi thënë se bashkësia e shndërrimeve të Lorencit formon grup-grupin e Lorencit, që është një grup Li (elementet e grupit janë funksione të vazhduara të parametrave të tyre). Shndërrimet e Lorencit veprojnë në hapësirë-kohë, por na intereson si vepron shndërrimi i Lorencit në vetë fushën, e cila ka këtë hapësirë-kohë si “habitat të saj”.

E nisim këtë analizë me *fushën skalare*-funksionin skalar të koordinatave hapësinore-kohore $\phi(x)$. Do të kemi

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x' = Ax) = \phi(x) = \phi(A^{-1}x),$$

sepse po marrim parasysh një **shndërrim aktiv** të koordinatave hapësinore-kohore, nw ndryshim nga ai **pasiv**. (Shihni vërejtjen e bërë në paragrafin e mëparshëm)

Nga shndërrimi i Lorencit $x' = Ax$ fusha skalare $\phi(x)$ shndërrohet sipas formulës evidente:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) = \phi(A^{-1}x) = \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) = \phi(x^\mu) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x),$$

² Po përdorim simbolin grek të madh për germën L që simbolizon shndërrimin e Lorencit për të mos e ngatërruar me Lagranzhianin e sistemit

sepse kemi bërë zbërthimin në seri të Teilorit duke marrë variacionin e koordinatave infinitezimal dhe duke pasur parasysh se koeficientët $\omega^\mu{}_\nu$ janë konstantë.
Nga më sipër mund të shkruajmë këtë variacion të potencialit të fushës:

$$\delta\phi = -\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)$$

Meqenëse Lagranzhiani është skalar mund të shkruajmë të njëjtën formulë për variacionin e Lagranzhianit, pra të marrim formulën:

$$\delta\mathcal{L} = -\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L} = -\partial_\mu (\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L})$$

(Të kihet parasysh antisimetria e koeficientëve të shndërrimit infinitezimal, që lejon shkrimin e variacionit të Lagranzhianit si më lart: $\partial_\mu x^\nu = \partial x^\nu / \partial x^\mu \equiv \delta^\nu{}_\mu$; $\omega^\mu{}_\mu = 0$)

Ushtrim: Proveni rezultatin e fundit.

Kështu, Lagranzhiani ndërron me një divergjencë të plotë të katërvektorit $F^\mu \equiv -\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L}$, nga ku gjejmë madhësitë që ruhen. Kemi dendësinë e rrymës katërpërmasore të Nëterit:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi(x) - F^\mu = -\omega^\sigma{}_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} x^\nu \partial_\sigma \phi - \delta^\mu{}_\sigma x^\nu \mathcal{L} \right] \equiv -\omega^\sigma{}_\nu T^\mu{}_\sigma x^\nu$$

Kemi lënë koeficientët infinitezimalë të shndërrimit- $\omega^{\mu\nu}$ me qellim të identifikojmë madhësitë që ruhen, por në realitet mund ta heqim ato, si madhësi konstante, për të marrë 6 “rryma” të ndryshme për çdo parametër $\omega^{\mu\nu}$, sipas formulës

$$(j^\mu)^{\rho\sigma} \equiv x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} \equiv M^{\mu\rho\sigma} \quad (b),$$

pasi kemi pajisur vektorin j^μ me dy indekset greke ρ, σ që marrin vlerat 0,1,2,3. Kuptohet se vetë indeksi i parë μ merr po ato vlera. Është e qartë se do të kemi $\partial_\mu (j^\mu)^{\rho\sigma} \equiv \partial_\mu (x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}) \equiv \partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$, sepse $\partial_\mu T^{\mu\sigma} = \partial_\mu T^{\mu\rho} = 0$. (Rikujtoni shprehjen për tenzorin e energji-impulsit të fushës dhe formulat 3.4,7.8).

Kjo madhësi plotëson kushtin $\partial_\mu ((j^\mu)^{\rho\sigma}) = 0$, për çdo indeks grek që merr vlerat 0,1, 2,3. duke dhënë 6 madhësitë që ruhen-“ngarkesat” e Nëterit. Atëherë, për indekset greke $\rho, \sigma = i = 1,2,3$ ($\mu = 0$) shndërrimi i simetrisë është thjesht rrotullim boshtesh në hapësirën dypërmasore, duke dhënë kështu tenzorin që ruhet:

$$M^{ij} \equiv Q^{ij} = \int_{V_\infty} (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) dV$$

Ky tenzor jep **momentin e plotë këndor** të fushës klasike. (Krahasoni këto formula me ato që nxorrëm në trajtesën me hamendësim për momentin këndor të fushës në paragrafët e mëparshëm (formulat 3.4.8)). Tri madhësitë e tjera që ruhen i gjegjen shndërrimeve të Lorencit që vijnë nga lëvizja e njëtrajtëshme e sistemeve të referimit duke mbajtur paralele boshtet e tyre (jo rrotullime në hapësirë). Madhësia që ruhet në këtë rast ka tri përbërëset e veta për $\rho = 0, \sigma = 1,2,3$ ($\mu = 0$):

$$M^{0i} \equiv Q^{0i} = \int_{V_\infty} (x^0 T^{0i} - x^i T^{00}) dV$$

Për të parë se çfarë është kjo madhësi që ruhet bëjmë derivatin në lidhje me kohën ($x^0 = t$, $c=1$!) që duhet të japë zero, pra:

$$\begin{aligned} \frac{dQ^{0i}}{dt} &= 0 = \int_{V_\infty} \left(T^{0i} + t \frac{\partial T^{0i}}{\partial t} \right) dV - \frac{d}{dt} \int_{V_\infty} x^i T^{00} dV = 0 = P^i + t \int_{V_\infty} \frac{\partial T^{0i}}{\partial t} dV - \frac{d}{dt} \int_{V_\infty} x^i T^{00} dV = \\ P^i + t \frac{dP^i}{dt} - \frac{d}{dt} \int_{V_\infty} x^i T^{00} dV &= 0 \end{aligned}$$

Mirëpo, P^i është përbërësja e i -të e impulsit të plotë të fushës që ruhet, dhe pra derivati i tij me kohën është zero, kështu që termi i dytë bie në ekuacionin e mësipërm. Atëherë nga më sipër kemi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\infty} x^i T^{00} dV = \text{const.}$$

Formula e fundit na tregon se qendra e energjisë (masës) së fushës lëviz me shpejtësi konstante.

Ushtrim: Interpretoheni këtë përfundim dhe krahasojeni me analogun e levizjes së bashkësisë së grimcave masive pikësore.

d₃ . Ekuacioni i Shrëdingerit nga Lagranzhiani përkatës dhe simetria U(1) në kontekstin e teoremës së Nöther-it

Në konkluzion të këtij kapitulli pyesim në se në se është e mundur të formulaohet dinamika e funksionit valor të Mekanikës kuantike në kuadrin e Mekanikës Lagranzhiane. Përgjigjja është po, në se funksionin valor (për thjeshtësi e marrim me një përmasë hapësinore) të trajtës $\psi(x, t)$ e shqyrtojmë tani si një fushë të vazhduar -gjegjëse në teorinë e fushës që pamë deri tani. Funksioni karakterizues i fushës është tani kompleks. Duke e marrë problemin **nga e kundërta** ndërtojmë një Lagranzhian (Tani në fakt është dendësi e Lagranzhianit) të trajtës

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i \hbar \left[\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - V \psi^+ \psi \quad (a),$$

ku shenja plus mbi funksionin karakterizues tregon kompleks- konjugimin. Në këto kushte ne po themi se fusha karakterizohet nga dy funksione karakterizuese që janë $\psi_1 \equiv \psi(x, t)$; $\psi_2 \equiv \psi^+(x, t)$. $V(x, t)$ është potenciali për fushën kur funksionin e fushës e konsiderojmë si funksion valor të Mekanikës kuantike, ndërsa m është masa e grimcës kuantike. Në Lagranzhianin e mësipërm, termi i parë shfaq kontributin e ndryshimit kohor të funksionit; termi i dytë kontributin e ndryshimit hapësinor të tij dhe termi i tretë bashkëveprimin me potencialin ku është ekspozuar grimca (në rastin që shqyrtojmë ajo nuk është e lirë). Për plotësi, termi i fundit mund të vihet në trajtën $V \psi^+ \psi = V |\psi|^2$, pra ky kontribut është në përpjesëtim me katrorin e amplitudës së funksionit të fushës (funksionit valor) në ngjashmëri-për shembull-me energjinë potenciale të oshilatorit harmonik që është e përpjesëshme me katrorin e madhësisë së shmangies së oshilatorit nga origjina e koordinatës.

Ushtrim: Duke u nisur nga ekuacioni Ojler-Lagranzh për fushën $\psi(x, t)$ dhe Lagranzhiani i mësipërm, gjeni ekuacionin e Shrëdingerit në trajtën:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv E \psi \quad (b),$$

ku E është energjia e grimcës kuantike.

Lagranzhiani në përdorim gëzon një simetri që e quajmë $U(1)$ simetri sepse kur shndërrohen “koordinatat e fushës” në trajtën $\psi(x, t) \rightarrow \psi(x, t)e^{i\varphi}; \psi^+(x, t) \rightarrow \psi^+(x, t)e^{-i\varphi}$ Lagranzhiani mbetet i pandrshuar, gjë që lexuesi mund ta provojë drejtpërdrejtë nga që $e^{i\varphi} x e^{-i\varphi} = x$.

Tani pyetet se cila është madhësia që ruhet si rezultat i kësaj siemtrie? Për këtë qellim shohim si zakonisht shndërrimet infinitezimale të funksioneve: $\psi(x, t)e^{i\delta\varphi}; \psi^+(x, t)e^{-i\delta\varphi}$ ku madhësia $\delta\varphi \ll 1$. **Atëherë, me afërsi të rendit të parë kemi këto shndërrime të dy funksioneve karakterizuese të fushës:**

$$\psi \rightarrow \psi(x, t)e^{i\delta\varphi} \approx 1 + (i\delta\varphi)\psi; \psi^+ \rightarrow 1 - (i\delta\varphi)\psi^+$$

Për rrjedhojë, kemi këto madhësi të ndryshimit të tyre:

$$\delta\psi = i\delta\varphi\psi; \delta\psi^+ = -i\delta\varphi\psi^+ \quad (c)$$

Nga këtu më lart, sipas skemës së përgjithëshme, marrim ngarkesën e Nëter-it të dhënë me formulën:

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial t)} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^+/\partial t)} \delta\psi^+ = -\hbar\psi^+\psi\delta\varphi = -\hbar|\psi|^2\delta\varphi \quad (d)$$

(Të kihet prasysh se $\psi_1 \equiv \psi(x, t); \psi_2 \equiv \psi^+(x, t)$ dhe funksioni F i pranishëm përgjithësisht në skemën e përgjithëshme këtu është zero- $F=0$).

Më tej, rryma e Nëter-it jepet me formulën

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^+/\partial x)} \delta\psi^+ = \frac{i\hbar^2}{2m} \left[\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right] \quad (e)$$

Kështu, nga simetria $U(1)$ e Lagranzhianit të ekuacionit të Shredingerit kemi madhësitë që ruhen në kohë, që janë ngarkesa dhe rryma e Nëter-it të dhëna me formulat (d) dhe (e).

Ajo që është me shumë rëndësi të theksohet këtu është se të dyja madhësitë **ruhen lokalisht** njëkohësisht bashkërisht, në ngjashmëri me ligjin likal të ruajtjes së ngarkesës së shpërndarë në mënyrë të vazhduar dhe në lëvizje, pra verifikohet lehtësisht se jo vetëm $dQ/dt = 0; dJ/dt = 0$, por mund të provohet lehtësisht se kemi edhe këtë ligj:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (f),$$

në ngjashmëri me ligjin e ruajtjes së ngarkesave që është $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$, ku kemi dendësinë e ngarkesave në

lëvizje dhe dendësinë e rrymës që ato përçojnë me lëvizjen e tyre (të mos harrohet se jemi në rastin me një përmasë hapësinore!). Ekuacioni (f) quhet *ekuacioni i vijueshmërisë* për analogji.

Ushttrim: Provoni drejtpërdrejt ekuacionin (f)

Duke marrë parasysh interpretimin kuantomekanik të katrorit të modulit të funksionit valor si dendësi propabiliteti- $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$, ekuacioni i ruajtjes lokale (f) do të shkruhet tani në trajtën e njohur nga Mekanika Kuantike, si më poshtë

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^2} \right) \quad (g),$$

gjë që jep **ruajtjen lokale të dendësisë së propabilitetit**

Ushtrim: Proveni formulën e fundit =(g)

Të japim tani kuptimin e **ruajtjes globale** të probabilitetit duke integruar në tërë hapësirën (në rastin tonë për x nga minus në plus infinit) të ekuacionit të vijueshmërisë (f). Kemi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial J}{\partial x} dx = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int Q dx + J(+\infty, t) - J(-\infty, t)$$

Por, në pafundësi funksioni valor është zero (me kuptim të qartë fizik), prandaj nga më sipër marrim

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} Q dx = -\hbar \delta\phi \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 0$$

(madhësitë $\hbar, \delta\phi$ janë konstante në tërë intervalin nga minus në plus infinit).

Duke interpretuar dendësinë e probabilitetit $P \equiv |\psi|^2$ nxorëm që $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} P dx = 0$, ose $\int_{-\infty}^{+\infty} P dx = \text{const.}$

Përfundimi është i qartë: Integrali i fundit jep probabilitetin e ndodhjes së grimcës në tërë hapësirën që nuk ka si ndërron me kohën. Në e normojmë funksionin valor në mënyrë që ai probabilitet të dalë 1. Pra, formula e mirënjohur e Mekanikës Kuantike $P \equiv |\psi|^2$ është me kuptim të plotë fizik.

Për plotësi, si përmbyllje po themi dy fjalë për kuadrin e veprimit të simetrisë $U(1)$. Kjo simetri konsiston në një koncept themelor që është e lidhur ngushtë me fushën elektromagnetike. Në kuadrin më të përgjithshëm është një *simetri kalibruese* që komandon sjelljen e ngarkesave elektrike dhe forcave elektromagnetike. Kjo simetri shpjegon ruajtjen e ngarkesës elektrike, ekzistencën e fotonit me masën zero dhe vetë natyrën e bashkëveprimit elektromagnetik. Në gjuhën matematike *grupi i shndërrimeve të funksioneve komplekse*-grupi $U(1)$, përfaqësohet nga funksionet komplekse $e^{i\phi}$, ku ϕ është një kënd çfarëdo, të cilat duke vepruar mbi fushat karakteristike të sistemit fizik, duke qenë se lenë të pandryshuar Lagranzhianin e sistemit quhen simetri. Kur këndi ϕ është një madhësi konstante atëherë simetria quhet globale dhe kur kemi $\phi(x)$ -pra vartësi nga pika e hapësirës, simetria quhet lokale ose simetri kalibruese. Në rastin e fushës elektromagnetike dimë se ajo ka si funksion të fushës 4-potencialin A_μ dhe rezulton të jetë një fushë kalibruese me simetri të tipit $U(1)$, sepse kemi invariancë të Lagranzhianit nga shndërrimi

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x),$$

ku rolin e $\phi(x)$ e luan tani $f(x)$ (kujtoni kapitullin II tek invarianca gradiente). Më tej, kjo simetri shpie tek ruajtja e ngarkesës elektrike dhe rryma që ruhet është vetë rryma e ngarkesave. Kur fusha elektromagnetike kuantizohet fusha kalibruese rezulton në fotone që nga ana e tyre ndërmjetësojnë në bashkëveprimin elektromagnetik. Parimi i simetrisë lokale $U(1)$ është koncepti bazë në *Teorinë Kuantike Të Fushës* dhe *Modelin Standard* të grimcave elementare.